مسائل في التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات

إعداد
حنان يوسف عبد المنعم قاضي
بكالوريوس في العلوم و التربية / قسم الرياضيات

إشراف
أ.د. إبراهيم محمد يوسف غالي
أستاذ الرياضيات البحتة بكلية العلوم بجامعة الأزهر بالقاهرة

بحث مقدم كجزء من متطلبات الحصول على درجة الماجستير في الرياضيات البحتة تخصص (تحليل دالي)

كلية التربية للبنات – الأقسام العلمية بجدة
جامعة الملك عبد العزيز
جدة
١٤٢٩هـ - ٢٠٠٨م

Optimal Control Problems of Hyperbolic Hemivariational Inequalities with an Infinite Number of Variables

By
Hanan U. A. Gadi

Supervised by
Prof. Ibrahim M. Y. Gali
Professor of Functional Analysis
Faculty of Science Department of Mathematics –
Al-Azhar University – Cairo – Egypt

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements
for the degree of M.Sc. In pure mathematics
(Functional analysis)

Girls College of Education –Scientific Sections in Jeddah
KING ABDULAZIZ UNIVERSITY
JEDDAH
1429 H - 2008 G

المستخلص

الهدف الأساسي من هذه الرسالة هو دراسة التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بمتباينات نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات و ذات متغيري تحكم أحدهما يظهر في الحد المتعدد القيم.

أولاً، قدمنا فراغات سوبوليف لدوال ذات عدد لا نهائي من المتغيرات. بعد ذلك، قمنا بصياغة مسألة متباينة نصف التغاير الزائدية و التي تحتوي على مؤثر ناقصي ذو عدد لا نهائي من المتغيرات و أثبتنا وجود الحلول لها. اعتمدنا في طريقة الإثبات على عملية التقريب ذات البعد المنتهي بواسطة أساس جاليركن و التقديرات الأولية. و هي الطريقة المفضلة عادة لدراسة المسائل التي تكون فيها خاصية الكوريسيف محققة.

ثانياً، قمنا بصياغة مسألة التحكم المحكومة بالنموذج السابق و أثبتنا خاصية شبه الاتصال العلوي لمجموعة الحلول للمتباينة. بعد ذلك، أثبتنا وجود زوج التحكم الأمثل المسموح به مستخدمين هذه النتيجة و الطريقة المباشرة في حساب التغاير.

Abstract

The main goal of this thesis is to study optimal control problem governed by hyperbolic hemivariational inequality with an infinitely many variables.

First, we introduce Sobolev spaces of functions of infinite numbers of variables. Then, we establish the existence of solutions to a hyperbolic hemivariational inequality which contains the elliptic operator with an infinite number of variables. The approach relies on the finite dimensional approximation by means of a Galerkin basis and on the a priori estimates. This approach is rather common in the study of problems where kind of coercivity property holds true. Second, we formulate our control problem governed by the previous model and prove the upper semicontinuity property of the solution set of the inequality. Then, we use this result and the direct method of the calculus of variations to show the existence of optimal admissible control pairs.

المحتويات
Contents

الموضوع	الصفحة
نموذج إجازة الرسالة	أ
المستخلص	ب
شكر و تقدير	ج
قائمة المحتويات	د-
المقدمة	١
الباب الأول: سلاسل الفراغات ذات المعايير الموجبة و السالبة	١١
1 1 : أساسيات في التحليل المحدب	١١
1 2 : فراغات هلبرت ذات المعيار الموجب و السالب	١٣
1 3 : الضرب الممتد لعدد منتهي ولا نهائي من فراغات هلبرت	٢٠
الباب الثاني: متباينات التغاير و نصف التغاير	٢٦
2 1 : متباينات التغاير	٢٦
2 2 : النهاية الصغرى للداليات المحدبة و متباينات التغاير	٣٦
2 3 : التفاضل الدوني للداليات المحدبة	٤١
2 4 : النتائج الأساسية للتدرجات المعممة	٤٦
2 5 : متباينات نصف التغاير	٥٦
2 6 : متباينات نصف التغاير الزائدية	٦٧
الباب الثالث: التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بواسطة متباينات نصف التغاير	٨٤
3 1 : التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بمعادلات تفاضلية جزئية ناقصية	٨٤
3 2 : التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بواسطة متباينات نصف التغاير	٩٢
3 3 :التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير الزائدية	١٠١
الباب الرابع: التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات .	١٢٠
4 1 : فراغات الدوال ذات عدد لا نهائي من المتغيرات	١٢١
4 2 : التحكم الأمثل لنظام محكوم بمؤثر زائدي ذو عدد لا نهائي من المتغيرات	١٢٣
4 3 : متباينات نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات	١٢٨
4 4 : التحكم الأمثل لنظام محكوم بواسطة متباينة نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات.....	١٤٤
المراجع	١٥٠
قائمة المصطلحات الرياضية	١٥٥
الملخص	١٦١
المستخلص باللغة الإنجليزية	i
الملخص باللغة الإنجليزية	ii

الملخص

تطورت نظرية متباينات التغاير تطوراً هائلاً، و كذلك مسائل التحكم الأمثل المناظرة لها. تزودنا هذه المتباينات بنموذج رياضي مناسب لوصف العديد من المسائل الفيزيائية. في الثمانينات قدم P.D. Panagiotopoulos [49-50] نوع جديد من متباينات التغاير تسمى بمتباينات نصف التغاير. تمثل هذه المتباينات الصياغة التغايرية للمسائل الفيزيائية و الميكانيكية التي تتضمن داليات طاقة غير محدبة و غير ملساء و ذلك باستخدام مفهوم التدرج المعمم لكلارك لدوال ليبشتز المحلية [11]. درست مسائل التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير [34,35,44-47,57] و لكن هذه المسائل أكثر تعقيداً من تلك لمتباينات التغاير، و يرجع ذلك إلى فقدان خاصية التحدب لداليات الطاقة.

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بمتباينات نصف التغاير الزائدية على فراغات سوبوليف لدوال ذات عدد لا نهائي من المتغيرات، و ذات متغيري تحكم أحدهما يظهر في الحد المتعدد القيم. قدمت هذه الفراغات بواسطة Ju. M. Berezanski and I. M. Gali [8-9]. بدأت دراسة مسائل التحكم الأمثل لأنواع مختلفة من المؤثرات المعرفة على فراغات دوال ذات عدد لا نهائي من المتغيرات بواسطة I. M. Gali et. al. [18-23]، H. A. EL-Saify [14]، W. Kotarsky [36]. تتركز نتائجنا في الباب الرابع و التي يمكن تلخيصها في النقاط الآتية:

1) صياغة متباينة نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات و إثبات وجود الحلول لهذه المتباينات. اعتمدنا في ذلك على عملية التقريب ذات البعد المنتهي بواسطة أساس جاليركن و التقديرات الأولية. و هي الطريقة المفضلة عادة لدراسة المسائل التي تكون فيها خاصية الكوريسيف متحققة.
2) أخذ المسألة السابقة كنموذج نظام في مسألة التحكم الأمثل و إثبات وجود الحلول لها.

نعرض الآن نبذة مختصرة عن محتويات الرسالة فيما يلي:

الباب الأول: سلاسل الفراغات ذات المعايير الموجبة و السالبة:

يعتبر هذا الباب باب تمهيدي يتضمن التعريفات و النظريات الأساسية التي نحتاج إليها في الرسالة و هو يتكون من ثلاثة فصول.

في الفصل الأول عرضنا بعض الأساسيات في التحليل المحدب. في الفصل الثاني قدمنا مفهوم فراغات هلبرت ذات المعايير السالبة و تكوين سلاسل فراغات هلبرت. أما الفصل الأخير، قدمنا فيه مفهوم الضرب الممتد المنتهي و اللا نهائي من فراغات هلبرت.

الباب الثاني: متباينات التغاير و نصف التغاير:

يتكون هذا الباب من ستة فصول: وضحنا في الفصل الأول متباينات التغاير و نظريات الوجود لها في حالات عدة. في الفصل الثاني، ناقشنا مسألة النهاية الصغرى للداليات المحدبة و هي تمثل النظريات الأساسية لمسألة التحكم الأمثل و التي استخدمت لاحقاً. عرضت العديد من النتائج و الخصائص للتفاضل الدوني للداليات المحدبة بالإضافة إلى النتائج الأساسية في التدرج المعمم لدوال ليبشتز المحلية في الفصلين الثالث و الرابع

على التوالي. في الفصلين الأخيرين قدمنا متباينات نصف التغاير و متباينات نصف التغاير الزائدية على الترتيب و ناقشنا نظريات الوجود في كلا الحالتين.

الباب الثالث: التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بواسطة متباينات نصف التغاير:

خصص هذا الباب لدراسة مسألة التحكم الأمثل لعدة أنظمة مختلفة كالآتي:

في الفصل الأول، قدمنا مسألة التحكم الأمثل لأنظمة محكومة بواسطة معادلات تفاضلية جزئية ناقصية.

يتعامل الفصل الثاني مع مسائل التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير. أما الفصل الأخير، ناقشنا فيه مسألة التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير الزائدية في الحالة المختلطة.

الباب الرابع: التحكم الأمثل لمتباينات نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات:

يحتوي هذا الباب على نتائجنا الجديدة في الفصلين الثالث و الرابع. عرضنا في الفصل الأول فراغات الدوال ذات عدد لا نهائي من المتغيرات. في الفصل الثاني، قدمنا مسألة التحكم الأمثل لمؤثرات زائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات.في الفصلين الأخيرين، درسنا و أثبتنا وجود الحلول لكلا المسألتين مسألة متباينة نصف التغاير الزائدية ذات عدد لا نهائي من المتغيرات و تطبيقها في نظرية التحكم الأمثل. هذه النتائج تم إرسالها للتحكيم في مجلات عالمية.

Summary

The theory of variational inequalities has been considerably developed and the corresponding optimal control problems have been investigated by many authors [4, 13, 25, 32, 41]. These inequalities provide us with an appropriate mathematical model to describe many physical problems. In the 80s, P. D. Panagiotopoulos [49-50] introduced a new kind of variational inequalities called hemivariational inequalities. These inequalities arise as a variational formulation for physical and mechanical problems with a nonsmooth and nonconvex energy functional, using the notion of generalized gradient of Clarke for locally Lipschitz functions [11]. The optimal control problem of hemivariational inequalities have been studied and investigated [34, 35, 44-47, 57]. These problems are more complicated than those of variational inequalities; due to the lack of convexity of the energy functional. The objective of this dissertation is to study the optimal control problem of systems governed by hyperbolic hemivariational inequalities on the Sobolev spaces of functions with infinite number of variables and with two control variables, one of them appearing as well as the solution in the multivalued term of hemivariational type. These spaces have been introduced by Ju. M. Berezanskii and I. M. Gali in [8-9]. The optimal control problems of systems governed by elliptic, parabolic and hyperbolic operators defined on spaces with an infinite number of variables are initiated and proved by I. M. Gali et. al. [18-22], H. A. EL-Saify [14] and W. Kotarskii [36]. The interest in the study of this class of operators is stimulated by problem in quantum field theory [6-7].

Our new results are concentrated in chapter IV, which can be summarized in the following points:

1. Formulate the hyperbolic hemivariational inequalities with an infinite number of variables and prove the existence of the solutions of these inequalities.
2. Take the last problem as a model of the system in the optimal control problem and prove the existence of the solution for the optimal control problem.

A brief outline of the content of the dissertation is as follows:

Chapter 1: Chains of Spaces with Positive and Negative Norms:

This chapter is an introductory chapter. It consists of three sections, in which we give some of the essential definitions and theories needed in the dissertation.

In section one, we present some of fundamentals of convex analysis. In the second section, we give the concept of Hilbert spaces with negative norms

and the construction of chains of Hilbert spaces. The last section presents the concept of tensor product of finitely and infinitely many Hilbert spaces.

Chapter 2: Variational and Hemivariational Inequalities:

Contains six sections, the first section discuss the variational inequalities and its existence theorems in many cases. In section two, we study the minimization problem of convex functionals which presents the essential theories for the optimal control problem which are used later. Many results and properties of the subdifferential of convex functional, also some basic results of generalized gradient for locally Lipschitz functions are placed in section three and four respectively. In the last sections we present the hemivariational inequalities and hyperbolic hemivariational inequalities respectively and discuss the existence theorem for both of them.

Chapter 3: Optimal Control Problems of System Governed by Hemivariational Inequalities:

This chapter is devoted for optimal control problems of systems governed by many different models and it contains three sections. In section one, we present the optimal control of systems governed by elliptic partial differential equations. The second section deals with the optimal control of hemivariational. In the last section, we discuss the optimal control problem of hyperbolic hemivariational inequalities in the mixed case.

Chapter 4: Optimal Control of Hyperbolic Hemivariational Inequalities with an Infinite Number of Variables:

This chapter contains our new result in section three and four. Spaces of functions of infinite number of variables are given in first section. In section two, we present the optimal control of hyperbolic operators with an infinite number of variables. In the last two sections, we study and prove the existence of the solution for both hyperbolic hemivariational inequalities with an infinite number of variables and its application in the optimal control theory. These results are submitted for publication.